

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a cinco preguntas, tres de ellas obligatorias y dos de ellas a escoger entre dos opciones. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Responda a las tres preguntas siguientes (calificación: 2 puntos por pregunta):

Pregunta 1. Dada la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- Discuta el rango de A en función del parámetro λ .
- Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

Pregunta 2. Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa. Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m², pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi: 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4},$$

se pide:

- Halle el punto simétrico del punto $P(2,0,0)$ respecto al plano π .
- Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:
 - Halle la distancia entre el plano π y la recta r .
 - Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación: 2 puntos):

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.

- b) Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0,4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$ y $P(B | A) = 0,2$, calcule las siguientes probabilidades:

- a) $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.
b) $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

Responda a una de las dos preguntas siguientes (calificación: 2 puntos):

Pregunta 5.1. Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \sin(ax) + b, & x < 0, \\ \frac{2e^x}{1+x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.
b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

SOLUCIONES

Pregunta 1. Dada la matriz real

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

- Discuta el rango de A en función del parámetro λ .
- Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

SOLUCIÓN:

- Para discutir el rango de una matriz cuadrada de orden 3, lo primero es calcular su determinante. Si el determinante es distinto de cero, la matriz tiene rango 3. Si el determinante es cero, tendremos que estudiar los menores de orden 2 para decidir si el rango baja a 2 o a 1.

Calculamos:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda - 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (\lambda - 2) \cdot \begin{vmatrix} 0 & \lambda - 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \lambda \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\det(A) = 1 - (\lambda - 2)(1 - \lambda) - \lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3.$$

Los valores en los que el determinante se anula son:

Por tanto, si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, se tiene $\det(A) \neq 0$ y, en consecuencia,

$$\text{rg}(A) = 3.$$

Quedan por estudiar los casos $\lambda = 1$ y $\lambda = 3$.

Si $\lambda = 1$, la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como el determinante es cero, el rango no puede ser 3. Sin embargo, el menor de orden 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

nos asegura que el rango es, al menos, 2. Como no puede ser 3, concluimos que

$$\text{rg}(A) = 2 \quad \text{si} \quad \lambda = 1.$$

Si $\lambda = 3$, la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, el determinante es cero, así que el rango no puede ser 3. Pero el menor

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

es no nulo, luego el rango es, al menos, 2. Por tanto,

$$\text{rg}(A) = 2 \quad \text{si} \quad \lambda = 3.$$

En definitiva,

$$\text{rg}(A) = \begin{cases} 3, & \lambda \neq 1, 3, \\ 2, & \lambda = 1 \text{ o } \lambda = 3. \end{cases}$$

b) Para $\lambda = 2$ tenemos

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La ecuación que debemos resolver es

$$A^2 - AX = I.$$

El objetivo es despejar X . Si pasamos sumando AX y pasamos I restando:

$$AX = A^2 - I.$$

Como para $\lambda = 2$ la matriz A tiene determinante distinto de cero, es invertible, así que podemos multiplicar por A^{-1} a la izquierda:

$$X = A^{-1}(A^2 - I).$$

También podemos simplificar esta expresión:

$$X = A^{-1}A^2 - A^{-1}I = A - A^{-1}.$$

Calculamos la inversa de A . Se obtiene:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Adj}(A)^t = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$X = A - A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

La solución de la ecuación matricial es

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pregunta 2. Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa. Alicatar la parte cubierta cuesta 30 €/m² y la parte no techada, 50 €/m², pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

SOLUCIÓN:

Como lo que queremos es minimizar el coste, al ser más barata la cubierta de la zona techada, lo que debemos hacer es maximizar el área del techo.

Tomamos como origen el vértice del ángulo recto del triángulo. Llamamos x a la longitud del lado del rectángulo paralelo al cateto de 42 m y llamamos y a la longitud del lado paralelo al cateto de 56 m, como se representa en el esquema adjunto.

La hipotenusa une los puntos (42,0) y (0,56). Esta hipotenusa está contenida en una recta de pendiente

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{56}{42} = -\frac{4}{3}.$$

Como la recta pasa por el punto (0,56), la ordenada en el origen es $n = 56$ y, por tanto, la recta será:

$$y = -\frac{4}{3}x + 56.$$

Para maximizar el área del techo, el vértice opuesto al que se encuentra en el origen deberá estar sobre la hipotenusa (en caso contrario, podríamos mover el vértice paralelamente a alguno de los ejes manteniendo el techo por encima del jardín, de manera que si este vértice no está sobre la hipotenusa, el área no sería máxima). Por tanto, las longitudes de los lados del rectángulo (x e y) deben satisfacer la relación anterior.

El área de la parte techada, incluyendo esta relación entre las variables x e y es:

$$A(x) = xy = x \left(56 - \frac{4}{3}x \right) = 56x - \frac{4}{3}x^2.$$

Derivamos:

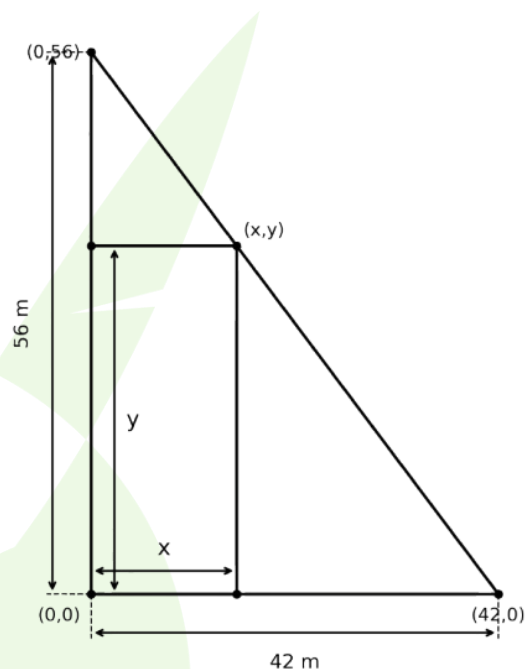
$$A'(x) = 56 - \frac{8}{3}x.$$

Igualemos a cero:

$$56 - \frac{8}{3}x = 0; \quad \frac{8}{3}x = 56; \quad x = 56 \cdot \frac{3}{8};$$

$$\boxed{x = 21.}$$

Calculamos el valor correspondiente de y :



$$y = 56 - \frac{4}{3} \cdot 21 = 56 - 28;$$

$$\boxed{y = 28.}$$

Además,

$$A''(x) = -\frac{8}{3} < 0,$$

por lo que el punto calculado da un máximo del área cubierta y, por tanto, un mínimo del coste.

Por tanto, respondiendo a la pregunta planteada, las dimensiones que minimizan el coste son

$$\boxed{21 \text{ m } y \text{ } 28 \text{ m},}$$

donde 21 m es la medida del lado paralelo al cateto de 42 m, y 28 m la medida del lado paralelo al de 56 m.

Pregunta 3. Dados el plano $\pi: 2x + 2y - z = 13$ y la recta

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{4},$$

se pide:

a) Halle el punto simétrico del punto $P(2, 0, 0)$ respecto al plano π .

b) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes:

b1) Halle la distancia entre el plano π y la recta r .

b2) Halle una ecuación del plano que contiene a la recta r y es ortogonal al plano π .

SOLUCIÓN:

a) Como el plano es

$$\pi: 2x + 2y - z = 13,$$

un vector normal al plano es

$$\vec{n} = (2, 2, -1).$$

Para hallar el simétrico de $P(2, 0, 0)$ respecto al plano, primero calculamos la proyección ortogonal de P sobre el plano. Consideremos la recta perpendicular a π que pasa por P . Por ser perpendicular a π , podemos tomar como vector director el vector normal a π , de manera que la recta será, en ecuaciones paramétricas:

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Así, la proyección de P sobre π será la intersección de esta recta con π . Para encontrar la intersección, metemos las ecuaciones de r_1 en π :

$$2(2 + 2\lambda) + 2(2\lambda) - (-\lambda) = 13; \quad 4 + 4\lambda + 4\lambda + \lambda = 13;$$

$$9\lambda = 9; \quad \lambda = 1.$$

Por tanto, la proyección es el punto de r_1 correspondiente a este valor de λ . Sus coordenadas son, por tanto:

$$\begin{cases} x = 2 + 2 = 4 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Entonces, la proyección de P sobre π es $Q(4, 2, -1)$.

Este punto Q es el punto medio del segmento que une P con su simétrico P' . Por tanto,

$$Q = \frac{P + P'}{2}.$$

De aquí,

$$P' = 2Q - P.$$

Sustituimos:

$$P' = 2(4, 2, -1) - (2, 0, 0) = (8, 4, -2) - (2, 0, 0) = (6, 4, -2),$$

por lo que el punto simétrico pedido es

$$\boxed{P'(6, 4, -2)}.$$

b1) La recta tiene vector director

$$\vec{v} = (1, 1, 4).$$

El vector normal del plano es

$$\vec{n} = (2, 2, -1).$$

Calculamos el producto escalar:

$$\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Como el producto escalar es cero, la recta es paralela al plano. Además, el punto $(2, 0, 0)$ pertenece a la recta. Comprobamos si pertenece al plano:

$$2 \cdot 2 + 2 \cdot 0 - 0 = 4 \neq 13.$$

Por tanto, la recta no está contenida en el plano, sino que es paralela a él. La distancia entre una recta paralela a un plano y el plano es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. De esta manera, podríamos calcular la distancia del punto P al plano π a través de la fórmula general. Sin embargo, podemos aprovechar también los resultados de la sección anterior: como la proyección de P sobre π es Q , la distancia de P a π (y, por tanto, la distancia de r a π) es la distancia de P a Q , es decir,

$$d(r, \pi) = d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|.$$

Conociendo las coordenadas de P y Q , el vector $\overrightarrow{PQ}$ será

$$\overrightarrow{PQ} = (4, 2, -1) - (2, 0, 0) = (2, 2, -1).$$

Finalmente,

$$d(r, \pi) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \|(2, 2, -1)\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = \sqrt{9};$$

$$\boxed{d(r, \pi) = 3 \text{ u.}}$$

b2) Buscamos un plano que contenga la recta r y sea ortogonal al plano π . Como contiene a r , debe contener su vector director

$$\vec{v} = (1, 1, 4).$$

Si el nuevo plano es ortogonal a π , su vector normal debe ser perpendicular al vector normal de π , que es

$$\vec{n} = (2, 2, -1).$$

Por tanto, un vector normal del plano buscado debe ser perpendicular a $\vec{v}$ y también perpendicular a $\vec{n}$. Podemos obtenerlo con el producto vectorial:

$$\vec{n}_2 = \vec{v} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-9, 9, 0).$$

Podemos simplificarlo y tomar

$$\vec{n}_2 = (1, -1, 0).$$

Así, la ecuación del plano debe ser de la forma

$$x - y + D = 0.$$

Como la recta r debe estar contenida en este plano, el punto $P \in r$ debe satisfacer la ecuación del plano (también podríamos tomar Q o P'), por lo que

$$2 - 0 + D = 0,$$

es decir, $D = -2$. Entonces, la ecuación del plano pedido es:

$$\boxed{x - y - 2 = 0.}$$

Pregunta 4.1. El proveedor de una fábrica de móviles proporciona baterías cuya duración sigue una distribución normal con media $\mu = 24$ horas y desviación típica $\sigma = 3$ horas. A efectos de control de calidad, se considera que una batería es defectuosa si su duración es inferior a 21 horas.

- Se elige un teléfono al azar de la línea de producción. Calcule la probabilidad de que su batería sea considerada defectuosa.
- Un distribuidor recibe un lote de 10 teléfonos. Suponiendo independencia entre ellos, ¿cuál es la probabilidad de que en ese lote haya al menos 9 teléfonos con la batería no defectuosa?

SOLUCIÓN:

- a) Sea X la duración, en horas, de una batería. El enunciado nos dice que

$$X \sim N(24, 3).$$

Una batería es defectuosa si dura menos de 21 horas, por lo que debemos calcular

$$P(X < 21).$$

Tipificamos:

$$Z = \frac{X - 24}{3}.$$

Entonces,

$$P(X < 21) = P\left(Z < \frac{21 - 24}{3}\right) = P(Z < -1).$$

Por simetría de la normal,

$$P(Z < -1) = 1 - P(Z < 1).$$

Usando la tabla de la normal tipificada:

$$P(Z < 1) = 0,8413.$$

Así,

$$P(Z < -1) = 1 - 0,8413 = 0,1587.$$

La probabilidad de que la batería sea considerada defectuosa es aproximadamente

$$P(\text{defectuosa}) = 0,1587.$$

- b) En base al resultado del apartado anterior, la probabilidad de que una batería no sea defectuosa es

$$q = 1 - 0,1587 = 0,8413.$$

Si el lote contiene 10 teléfonos y suponemos independencia, el número de teléfonos con batería no defectuosa (que llamaremos Y) sigue una distribución binomial:

$$Y \sim B(10, 0,8413).$$

Nos piden la probabilidad de que haya al menos 9 teléfonos con batería no defectuosa:

$$P(Y \geq 9) = P(Y = 9) + P(Y = 10).$$

Aplicamos la fórmula de la binomial:

$$P(Y = 9) = \binom{10}{9} (0,8413)^9 (1 - 0,8413),$$

$$P(Y = 10) = \binom{10}{10} (0,8413)^{10}.$$

Por tanto,

$$P(Y \geq 9) = 10(0,8413)^9(0,1587) + (0,8413)^{10}.$$

Calculando,

$$P(Y \geq 9) \approx 0,5129.$$

Pregunta 4.2. Sabiendo que $P(B) = 0,4$, $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$ y $P(B | A) = 0,2$, calcule las siguientes probabilidades:

- $P(\overline{A})$ y $P(A \cap B)$.
- $P((A \cap B) | (A \cup B))$.

SOLUCIÓN:

a) Nos dan los siguientes datos:

$$P(B) = 0,4, \quad P(\overline{A \cup B}) = 0,4, \quad P(B | A) = 0,2.$$

Como $P(\overline{A \cup B}) = 0,4$, entonces

$$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0,4 = 0,6.$$

Por otra parte,

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0,2.$$

De aquí podemos expresar la probabilidad de la intersección de A y B en términos de la probabilidad de A :

$$P(A \cap B) = 0,2P(A).$$

Usamos ahora la fórmula de la unión:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Sustituyendo los datos:

$$0,6 = P(A) + 0,4 - 0,2P(A).$$

De esta manera nos queda una ecuación de primer grado en $P(A)$. Resolviendo esta ecuación, se tiene:

$$0,6 = 0,8P(A) + 0,4; \quad 0,2 = 0,8P(A); \quad P(A) = \frac{0,2}{0,8} = 0,25.$$

Por tanto,

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,25;$$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 0,75.}$$

Además, ahora que conocemos la probabilidad de A , podemos calcular la probabilidad de la intersección con la relación a la que habíamos llegado anteriormente:

$$P(A \cap B) = 0,2P(A) = 0,2 \cdot 0,25;$$

$$\boxed{P(A \cap B) = 0,05.}$$

b) Debemos calcular

$$P((A \cap B) | (A \cup B)).$$

Por definición de probabilidad condicionada,

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{P((A \cap B) \cap (A \cup B))}{P(A \cup B)}.$$

Como $A \cap B$ está contenido en $A \cup B$, se tiene

$$(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cap B.$$

Así,

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{0,05}{0,6} = \frac{1}{12}.$$

Por tanto,

$$P((A \cap B) | (A \cup B)) = \frac{1}{12}.$$

Pregunta 5.1. Sea $f(x) = \ln(x)$. Halle el área de la región acotada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y la recta $x = e$.

SOLUCIÓN:

El área que nos preguntan es el resultado de una integral indefinida de la función

$$f(x) = \ln(x).$$

Como nos piden el área entre la gráfica de la función, el eje x y la recta $x = e$, uno de los límites de integración será $x = e$. Para conocer el otro límite, debemos ver dónde se anula la función:

$$\ln(x) = 0; \quad x = e^0 = 1.$$

Así, la integral que debemos calcular para hallar el área pedida es:

$$A = \int_1^e \ln(x) dx.$$

Para calcularla usamos integración por partes. Tomamos

$$u = \ln(x), \quad dv = dx.$$

Entonces,

$$du = \frac{1}{x} dx, \quad v = x.$$

Por tanto,

$$\int \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln(x) - \int 1 dx = x \cdot \ln(x) - x = x(\ln(x) - 1).$$

Ahora evaluamos entre 1 y e :

$$A = [x(\ln(x) - 1)]_1^e.$$

Sustituyendo los extremos:

$$A = e(\ln(e) - 1) - 1(\ln(1) - 1).$$

Como $\ln(e) = 1$ y $\ln(1) = 0$, queda

$$A = e(1 - 1) - 1(0 - 1) = 1.$$

Por tanto, el área pedida es

$$A = 1 \text{ u}^2.$$

Pregunta 5.2. Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \text{sen}(ax) + b, & x < 0, \\ \frac{2e^x}{1+x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

- a) Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en $x = 0$.
b) Halle la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x = 2$.

SOLUCIÓN:

- a) La función está definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - \text{sen}(ax) + b, & x < 0, \\ \frac{2e^x}{1+x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Para que sea continua en $x = 0$, el límite por la izquierda debe coincidir con el valor de la función en 0.

Por la izquierda:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 - \text{sen}(ax) + b) = 3 \cdot 0^2 - \text{sen}(a \cdot 0) + b = b.$$

Por la derecha:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2e^x}{1+x^2} = \frac{2e^0}{1+0^2} = 2.$$

Además,

$$f(0) = \frac{2e^0}{1+0^2} = 2.$$

Para que la función sea continua, los tres valores anteriores deben ser nulos, de manera que la continuidad exige

$$\boxed{b = 2.}$$

Ahora imponemos que sea derivable en $x = 0$. Para ello deben coincidir las derivadas laterales.

Derivamos el tramo izquierdo:

$$\frac{d}{dx} (3x^2 - \text{sen}(ax) + b) = 6x - a \cdot \cos(ax).$$

Por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 6 \cdot 0 - a \cdot \cos(0) = -a.$$

Derivamos el tramo derecho, usando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{2e^x(1+x^2) - 2e^x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}.$$

En $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{2e^0(1 + 0^2) - 2e^0 \cdot 0}{(1 + 0^2)^2} = 2.$$

La derivabilidad exige que ambos límites sean iguales, de manera que se debe cumplir

$$-a = 2,$$

es decir,

$$\boxed{a = -2.}$$

Así, los valores que hacen que la función sea continua y derivable en $x = 0$ son

$$\boxed{a = -2, \quad b = 2.}$$

b) Para $x = 2$ usamos el segundo tramo, porque $2 \geq 0$:

$$f(x) = \frac{2e^x}{1 + x^2}.$$

Calculamos el valor de la función en el punto de tangencia:

$$f(2) = \frac{2e^2}{1 + 2^2} = \frac{2e^2}{5}.$$

La pendiente de la recta tangente es, por definición, la derivada: $m = f'(2)$. Ya hemos calculado que

$$f'(x) = \frac{2e^x(1 + x^2) - 2e^x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}.$$

Evaluando en $x = 2$,

$$f'(2) = \frac{2e^2(1 + 2^2) - 2e^2 \cdot 2 \cdot 2}{(1 + 2^2)^2} = \frac{10e^2 - 8e^2}{(5)^2} = \frac{2e^2}{25}.$$

La recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$ tiene la forma

$$y - f(2) = f'(2)(x - 2),$$

es decir,

$$y - \frac{2e^2}{5} = \frac{2e^2}{25}(x - 2).$$

Esta es la ecuación de la recta tangente. Despejando y para obtener la forma explícita, la ecuación de la recta tangente es:

$$\boxed{y = \frac{2e^2}{25}x + \frac{6e^2}{25}.$$